

「分け分け法」について (たすき掛けを用いない2次式の因数分解)

「分け分け法」とは

本テーマ「分け分け法」とは、2次式 $ax^2 + bx + c$ の因数分解を、高校内容の「たすき掛け」を使わずにする方法のことです。証明内容を除けば中学レベルで理解できる内容であるため、できるだけ中学生にとって親しみやすいように説明しています。

「分け分け法」は、 $4x^2 - 29x + 25$ のように、 x^2 の係数が1でない場合に威力を発揮することがあります。

たとえば、次が「分け分け法」による因数分解です。

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \quad 4x^2 - 29x + 25 &= 4x^2 - \underline{4x - 25x} + 25 \\ &= 4x(x - 1) - 25(x - 1) \\ &= (x - 1)(4x - 25)\end{aligned}$$

x の1次の項をうまく2つに分けることにより、共通因数を出現させるのです。

本質的には当然なのですが、次のように分けてもOKです。

$$\begin{aligned}\textcircled{2} \quad 4x^2 - 29x + 25 &= 4x^2 - \underline{25x - 4x} + 25 \\ &= x(4x - 25) - (4x - 25) \\ &= (x - 1)(4x - 25)\end{aligned}$$

x の1次の項をどのように分けているかという「係数の比が等しくなるように」しています。

実際に、分け分けした後の式を $ax^2 + mx + nx + c$ (ただし、 $m + n = b$) とし、2つの比 $a : m$ と $n : c$ をそれぞれ考えると、上の①の計算では

$$\begin{aligned}a : m &= 4 : -4 & n : c &= -25 : 25 \\ &= 1 : -1 & &= 1 : -1\end{aligned}$$

だから $a : m = n : c$ となり、上の②の計算でも

$$\begin{aligned}a : m &= 4 : -25 & n : c &= -4 : 25 \\ & & &= 4 : -25\end{aligned}$$

だから $a : m = n : c$ となっていますね。

（比の項の値に負の数があっても馴染みがないと思いますが、ここでは負の値の比を使わせていただきます。）

ただ、上の計算について改善できる点があります。 x の1次の項をうまく分けさえすれば、その後の因数分解の結果に何かしらの規則性が見いだせるのではないのでしょうか。

具体的な数字による議論によって、イメージしやすくなることは利点です。しかし、その数字がどのようにして作られたかという構造をたどりにくいことが欠点なのです。他の2次式が与えられた場合に対応できるようにするためにも、「分け分け法」を文字式によって一般化する必要があるのです。

「分け分け法」の拡張版

やはり、1ページ目で強調した「係数の比が等しくなるように」を使うことで、一般化できます。ただ、一般化すると前提条件が想像以上にややこしくなります。こうなります。

定理（「分け分け法」の拡張版）

$a > 0$ であり、 a, b, c は互いに素な整数とする。 $b^2 - 4ac$ が整数の2乗で表されたとする。
2次式 $ax^2 + bx + c$ に対して、特性方程式 $t^2 - bt + ac = 0$ を定める。

この方程式の2解を m, n とし（解を1つしかもたない場合は、 $m = n$ としてよい）、
 $a : m$ の各項を自然数で割って最も簡単な整数の比にしたものを $p : q$ 、
 $a : n$ の各項を自然数で割って最も簡単な整数の比にしたものを $r : s$ とする。

このとき、次のように因数分解できる。

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s)$$

x^2 の係数が1でない2次式の因数分解は、 x^2 の係数が1である2次式の因数分解に帰着できることを意味します。ここで出てくる m, n は、1ページ目の分け分けの際に出てくる m, n と実は同じものです。

さらに、 m と n が求まった後は、かなり簡単な計算で因数が導き出されることを意味します。

なぜこうなるかは後述として、とにかく実際に、このアルゴリズムで因数分解してみましょう。

例題 1. $18x^2 + 45x - 8$ を因数分解しなさい。

解答 $a > 0$ であり、 a, b, c は互いに素な整数であるから、「分け分け法」での因数分解を試みる。

方程式 $t^2 - 45t - 144 = 0$ を解くと、 $(t + 3)(t - 48) = 0$ より、 $t = -3, 48$

$18 : -3 = 6 : -1$ であり、 $18 : 48 = 3 : 8$ であるから、

$$(\text{与式}) = (6x - 1)(3x + 8)$$

例題 2. $4a^4b^4 - 29a^2b^2 + 25$ を因数分解しなさい。

[2018 東京農業大学第一高]

考え方 置き換えにより，2 次式に帰着できます。

解答 $a^2b^2 = X$ とおくと，

$$(\text{与式}) = 4X^2 - 29X + 25$$

この X の 2 次式において， $a > 0$ であり， a ， b ， c は互いに素な整数であるから，「分け分け法」での因数分解を試みる。

ここで，方程式 $t^2 + 29t + 100 = 0$ を解くと， $(t + 4)(t + 25) = 0$ より， $t = -4$ ， -25
 $4 : -4 = 1 : -1$ であり， $4 : -25$ はこれ以上簡単にできないから，

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (X - 1)(4X - 25) \\ &= (a^2b^2 - 1)(4a^2b^2 - 25) \\ &= (ab + 1)(ab - 1)(2ab + 5)(2ab - 5) \end{aligned}$$

例題 3. $xy + 3x - 3y^2 - 11y - 6$ を因数分解しなさい。

考え方 次数が一番低い x について整理します。また，「分け分け法」の前提条件 $a > 0$ を満たすようにするため， $-3y^2 - 11y - 6 = -(3y^2 + 11y + 6)$ と変形します。

解答 $(\text{与式}) = x(y + 3) - (3y^2 + 11y + 6)$

$3y^2 + 11y + 6$ において， $a > 0$ であり， a ， b ， c は互いに素な整数であるから，「分け分け法」での因数分解を試みる。

ここで，方程式 $t^2 - 11t + 18 = 0$ を解くと， $(t - 2)(t - 9) = 0$ より， $t = 2$ ， 9
 $3 : 2$ はこれ以上に簡単にできず， $3 : 9 = 1 : 3$ であるから，

$$\begin{aligned} 3y^2 + 11y + 6 &= (3y + 2)(y + 3) \\ \text{ゆえに，} xy + 3x - 3y^2 - 11y - 6 &= x(y + 3) - (3y + 2)(y + 3) \\ &= (x - 3y - 2)(y + 3) \end{aligned}$$

ちなみに例題としては触れませんが，係数が大きくなればなるほど， t についての方程式そのものの因数分解が難しくなります。「分け分け法」はあくまでも中学範囲の因数分解に帰着するためのものであり，いろんな 2 次式の因数分解するのに現実な方法とはいえません。むしろ，高校内容のたすき掛けを覚えた方が簡単だと思います。

「分け分け法」の拡張版の証明

最後に、なぜこの方法で因数分解できるか、なぜこのような前提条件があるかを述べます。

「分け分け法」の証明するために必要な補題を2つ紹介し、その後に本題の証明に入ります。

(※ 証明内容に関しては高校生以上のレベルです。)

補題1 (因数分解できる条件)

$a \neq 0$ であり、 a, b, c は整数とする。

x についての2次式 $ax^2 + bx + c$ において、 $b^2 - 4ac$ が整数の2乗で表されるならば、整数の範囲で因数分解できる。

証明

$b^2 - 4ac = d^2$ (d は0以上の整数) で表されるとき、 $4ac = b^2 - d^2$

$$= (b+d)(b-d) \quad \cdots \cdots (\text{ア})$$

b, d の偶奇が異なると仮定すると、 $b+d, b-d$ はともに奇数となり、(ア)の左辺が4の倍数であることに矛盾する。

よって、 b, d の偶奇は等しい。

$b+d, b-d$ はともに2の倍数だから、 $A = \frac{b+d}{2}, B = \frac{b-d}{2}$ とおくと、 A, B は整数である。

A と a の最大公約数を g_1 とおき、 $\frac{A}{g_1} = h_1, \frac{a}{g_1} = g_2$ とおくと、 h_1 と g_2 は互いに素な整数である。 $\cdots \cdots (\text{イ})$

(ア)より、 $c = \frac{AB}{a} = \frac{\frac{A}{g_1} \times B}{\frac{a}{g_1}} = \frac{h_1 B}{g_2}$ であり、(イ)より、 g_2 は B の約数である。 $\frac{B}{g_2} = h_2$ とおくと、 h_2 は整数である。

$$\text{ゆえに、} a = g_1 g_2, b = A + B = h_1 g_1 + h_2 g_2, c = h_1 h_2$$

$$\begin{aligned} \text{したがって、} ax^2 + bx + c &= g_1 g_2 x^2 + (h_1 g_1 + h_2 g_2)x + h_1 h_2 \\ &= g_1 x(g_2 x + h_1) + h_2(g_2 x + h_1) \\ &= (g_1 x + h_2)(g_2 x + h_1) \end{aligned}$$

■

この補題も十分に有用です。どのように役に立つかについては「数研通信」9号の「2次3項式が“たすき掛け”で因数分解可能なのは？(塩見浩三)」で詳しく述べられています。

本テーマの「分け分け法」は、この補題の前提条件

「 $a \neq 0$ であり、 a, b, c を整数とする」「 $b^2 - 4ac$ が整数の2乗で表される」を内包することで、整数の範囲で因数分解できることを保証しているのです。

補題 2 (係数が互いに素の場合)

$a \neq 0$ であり, a, b, c は互いに素な整数とする。

x についての 2 次式 $ax^2 + bx + c$ において, $b^2 - 4ac$ が整数の 2 乗で表されるならば,

補題 1 の g_1, h_2 は互いに素である。

証明 $b^2 - 4ac$ が整数の 2 乗で表されるならば, **補題 1** の証明より, g_1, h_1, g_2, h_2 はすべて整数である。 g_2, h_1 は互いに素である。

「 a, b, c が互いに素ならば, g_1 と h_2 は互いに素である」ことを対偶証明法で示す。

g_1, h_2 が互いに素でないならば, $g_1 = gg'_1, h_2 = gh'_2$ となるような 1 より大きい整数 g が存在する。 (g'_1, h'_2) は互いに素な整数とする

このとき, $a = g_1g_2 = gg'_1g_2, b = h_1g_1 + h_2g_2 = g(h_1g'_1 + h'_2g_2), c = h_1h_2 = gh_1h'_2$ だから, a, b, c は 1 より大きい公約数 g をもつ (a, b, c は互いに素ではない)。

ゆえに, a, b, c が互いに素ならば, g_1, h_2 は互いに素である。 ■

定理 (「分け分け法」の拡張版)

$a > 0$ であり, a, b, c は互いに素な整数とする。 $b^2 - 4ac$ が整数の 2 乗で表されるとする。
2 次式 $ax^2 + bx + c$ に対して, 特性方程式 $t^2 - bt + ac = 0$ を定める。

この方程式の 2 解を m, n とし (解を 1 つしかもたない場合は, $m = n$ としてよい),
 $a : m$ の各項を自然数で割って最も簡単な整数の比にしたものを $p : q$,
 $a : n$ の各項を自然数で割って最も簡単な整数の比にしたものを $r : s$ とする。

このとき, 次のように因数分解できる。

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s)$$

証明 $b^2 - 4ac = d^2$ (d は 0 以上の整数) とする。

方程式 $t^2 - bt + ac = 0$ の解は,

$$t = \frac{b \pm d}{2} = A, B \quad (\text{ただし, } A \text{ と } B \text{ は補題 1 のものとする})$$

よって, $m = A, n = B$ とおける。

a と A の 正の最大公約数 を g_1 とおき, **補題 1** と同様に $\frac{A}{g_1} = h_1, \frac{a}{g_1} = g_2, \frac{B}{g_2} = h_2$ とおくと, g_2, h_1 は互いに素である。

さらに, a, b, c は互いに素であるから, **補題 2** より g_1, h_2 も互いに素である。

補題 1 より, $ax^2 + bx + c = (g_1x + h_2)(g_2x + h_1)$ ……(イ)

$a > 0$ であるから, $g_2 = \frac{a}{g_1} > 0$ である。

よって, $a : m = a : A = \frac{a}{g_1} : \frac{A}{g_1} = g_2 : h_1$ だから, $p = g_2, q = h_1$ ……(ウ)

また, $a : n = a : B = g_1g_2 : g_2h_2 = \frac{g_1g_2}{g_2} : \frac{g_2h_2}{g_2} = g_1 : h_2$ だから, $r = g_1, s = h_2$ ……(エ)

(イ), (ウ), (エ)より, $ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s)$ ■

この定理の証明で注意すべきことを述べます。

「 $a > 0$ 」という仮定があります。また, 証明の(ウ), (エ)では, 比の各項を自然数で割ることによって簡単にしています。この制約によって a, p, r が同符号となり, $ax^2 + bx + c$ と $(px + q)(rx + s)$ における x^2 の係数を比較しても矛盾が起きないのです。

また, 「 a, b, c が互いに素な整数」という仮定によって, 比を簡単にして出てくる数をそのまま因数分解に使えるようになります。比を簡単にすることで, p, q と, r, s をそれぞれ互いに素にできるのです。 $ax^2 + bx + c$ に定数の共通因数が存在すると, $(px + q), (rx + s)$ のいずれかまたは両方に定数の共通因数が存在してしまい, この計算法の適用するには都合が良くないです。

特性方程式 $t^2 - bt + ac = 0$ については, $ax^2 + bx + c = ax^2 + mx + nx + c$

$$= x(ax + m) + nx + c \text{ (ただし, } m + n = b \text{)}$$

と変形したときに, 共通因数ができる条件 $a : m = n : c$ すなわち $mn = ac$ から導くことができます。 $(t - m)(t - n) = t^2 - (m + n)t + mn = t^2 - bt + ac$ より, m, n は $t^2 - bt + ac = 0$ の解です。

この定理の適用条件は一見すると厳しいように見えます。しかし, 有理数を係数とする 2 次式 $\frac{q_2}{p_2}x^2 + \frac{q_1}{p_1}x + \frac{q_0}{p_0}$ (p_i, q_i ($i = 0, 1, 2$) はそれぞれ互いに素な整数) はすべて, $ax^2 + bx + c$ ($a > 0$ であり, a, b, c は互いに素な整数) を用いて表すことができます。

$$\begin{aligned} \frac{q_2}{p_2}x^2 + \frac{q_1}{p_1}x + \frac{q_0}{p_0} &= \frac{1}{p_0p_1p_2}(p_0p_1q_2x^2 + p_0p_2q_1x + p_1p_2q_0) \\ &= \frac{G}{p_0p_1p_2}(ax^2 + bx + c) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ただし, } G \text{ は } p_0p_1q_2, p_0p_2q_1, p_1p_2q_0 \text{ の } \frac{q_2}{p_2} \text{ と同符号の最大公約数であり,} \\ a = \frac{p_0p_1q_2}{G}, b = \frac{p_0p_2q_1}{G}, c = \frac{p_1p_2q_0}{G} \end{array} \right)$$

と変形することで, $ax^2 + bx + c$ についての議論で十分ということになります。

元々はブログの内容を補足することを目的としてこの資料を作りましたが, 予定以上にボリュームが濃くなりました。この「分け分け法」をぜひ教育現場などに役立てて頂ければ幸甚です。